Journal de Objetos y Objetivos Matemáticos No. 2. Enero-Junio 2020.
ISSN en trámite. http://joom.org.mx

Cálculo combinatorio en la enseñanza de las matemáticas.

Nayeli Lopez Tailes
Escuela Normal Superior de México, Manuel Salazar 201 Colonia Ex-hacienda del Rosario, Azcapotzalco, 02420 CDMX, México.
nayelinsmm@gmail.com

***Resumen*- A través del cálculo combinatorio se propone determinar las formas en que se pueden representar, modelar y simular diferentes arreglos de elementos en un conjunto aleatorio y algunas aplicaciones con variaciones, permutaciones y combinaciones utilizando funciones; ya que el análisis combinatorio expresa un esquema operacional fundamental para el razonamiento lógico. Este tópico representa importancia en la enseñanza, donde los alumnos pueden realizar actividades características de matematización: hacer conjeturas, generalización, la optimización y el pensamiento sistemático.**

***Palabras Clave*- combinatoria, variaciones, permutaciones, funciones, enseñanza de las matemáticas.**

Abstract- Through combinatorial calculus, it is proposed to determine the ways in which they can represent, model and simulate different arrangements of elements in a random set and some applications with variations, permutations and combinations of functions; since combinatorial analysis expresses a fundamental operational scheme for logical reasoning. This topic represents importance in teaching, where students can perform characteristic mathematical activities: making guesses, generalization, optimization, and systematic thinking.

Keywords- combinatorial, variations, permutations, functions, maths teaching.

***Mathematical Subject Classification:* 97D50.**

I. Introducción

La combinatoria pertenece un área de las matemáticas discretas, en donde éstas se ocupan de estudiar las distintas configuraciones de conjuntos no continuos; es decir finitos o infinitos numerables, que pueden obtenerse, a partir de sus elementos dados mediante ciertas trasformaciones que originan cambios en la estructura o la composición de estos. La estructura de estos conjuntos puede ser muy compleja dependiendo de las relaciones existentes entre sus elementos que asignan como resultado diferentes permutaciones, combinaciones y variaciones[1].

El diseño y aplicación del cálculo combinatorio permite orientar el proceso de enseñanza–aprendizaje a través de situaciones reales; así mismo contribuye al desarrollo del pensamiento sistémico en el que le permite abordar todos los elementos que lo componen y las relaciones entre ellos; su enumeración, construcción de algoritmos y la abstracción de las propiedades que satisfacen ciertas condiciones establecidas[2]. Una de las funciones de la matemática es modelar procesos y fenómenos de la realidad, algunos de ellos son de tipo aleatorio y es en la resolución de problemas combinatorios donde generalmente se debe examinar todas las posibilidades para llegar a una generalización[3].

La combinatoria ha ganado mucha importancia debido a sus amplias aplicaciones en la teoría de probabilidades, estadística, teoría de números, lógica, informática y teoría de grafos. El objeto de estudio de la combinatoria ha evolucionado con el tiempo, actualmente el análisis combinatorio busca encontrar los principios y teorías unificadoras que permitan ordenar y sistematizar el gran número de resultados existentes aparentemente dispersos e inconexos y sin relación[3].

El presente trabajo recapitula los orígenes de la combinatoria en donde subyacen las primeras nociones y conceptos básicos del cálculo combinatorio gracias a los trabajos de grandes matemáticos en el mundo antiguo y su crecimiento acelerado a partir de la segunda mitad del siglo XX. Expone un marco teórico sobre las bases de la combinatoria y propone problemas didácticos a partir de funciones inyectivas para la aplicación real de permutaciones, variaciones y combinaciones. Mediante el Aprendizaje Basado en Problemas se presentan situaciones reales, donde se puede realizar conjeturas y estrategias de solución para estos tópicos.

Uno de los conceptos torales dentro de la combinatoria es el de coeficiente binomial (n,r) el cual cuenta el número de subconjuntos de r elementos de un conjunto de n elementos. La teoría desarrollada para este concepto es basta y fructífera en aplicaciones. Dentro de esta resaltan las identidades combinatorias, las cuales son igualdades que contienen coeficientes binomiales[1].

II. Orígenes de la Combinatoria

El estudio de la combinatoria se desarrolló paralelamente con el de otras ramas de la matemática, tales como el álgebra y teoría de números, ya que sus primeros hallazgos datan de China en el siglo XXII. Los cuadrados mágicos son ejemplos de los más antiguos que existen sobre problemas de combinatoria[4]; éstos aparecen y fueron la base del famoso libro místico chino I – Ching (易經) hacia 1200 A.C[5]. Es importante resaltar que los cuadrados mágicos inscritos en el caparazón de una tortuga son un arreglo de elementos de un conjunto finito que responde a una determinada condición, cuya base combinatoria consta de 64 hexagramas que muestran todas las permutaciones posibles de dos tipos de líneas, al tomarlas de seis en seis[5].

Por otro lado el escrito Chino Pa Kua (八卦) es otro ejemplo de los más antiguos libros en donde se exhiben problemas sobre el cálculo combinatorio mediante el número de permutaciones de una serie de segmentos dispuestos alrededor de un círculo [6].

En el libro chino el precioso espejo de los cuatro elementos (四个元素的珍贵镜子) de Zhu Shijie en 1303, aparece un diagrama conocido como el triángulo aritmético, en el que se presentan diferentes desarrollos binomiales hasta la potencia octava, así como el desarrollo de series y progresiones[7].

Otro encuentro del concepto de permutación se encuentra en la obra Hebrea de Sefer Yetzirah, un manuscrito elaborado entre el año 200 y 600; aunque tiempo atrás, Xenocrates de Calcedonia (96 314 a.C) habría propuesto la solución[8].

En el mismo siglo XXII el matemático Hindú Bhaskara comienza a explorar este campo; en el primer volumen de su obra principal el Siddhānta Shiromani (1150) donde publica el tratado Līlāvatī dedicado a la combinatoria en el cual vislumbra el problema de la distribución de objetos o partición de conjuntos y enuncia una regla para hallar el número de colocaciones de n cosas de una clase y (m-n) de otra[9].

El matemático y astrónomo judío Levi Ben Gerson en su libro De harmonicis numeris (1343) realizó un estudio más detallado de las permutaciones, arreglos y combinaciones de un conjunto de objetos argumentando la igualdad del número de colocaciones de n cosas de una clase K; la cual implícitamente se encierra el modelo de partición de un conjunto [10].

Por otro lado; el término “coeficiente binomial” fue introducido realmente por Michel Stifer (1486-1567) en su obra Arithmetica Integra (1544) indicando los coeficientes binomiales hasta el orden n=17 [11] .

Tartaglia en su libro Trattato di numeri et misure (1560) introdujo un triángulo que proporciona una regla para calcular combinaciones; ya que fue el primero en ocuparse del rencuentro del número de combinaciones diferentes en el juego de dados[12] .

Tiempo después Gerolamo Cardano en su libro Liber de ludo aleae (1663) constituye el primer tratado serio de probabilidad abordando métodos de cierta efectividad en la combinatoria a partir de juegos de azar y deduciendo los coeficientes de $(a+b)^n$; dando como resultado que el número de combinaciones de n elementos tomadas era $(a+b)^2$ terminando con la solución a la ecuación cúbica[13] .

Las contribuciones de Fermat y Pascal dan un giro al trasfondo relevante de la combinatoria, siendo a través de los juegos de azar donde se visualizan los principios para determinar el número de combinaciones de elementos de un conjunto finito; en particular sobre el problema de la división de la apuesta planteado por el caballero de Meré[14] .

Los matemáticos anteriormente descritos reconocen el análisis combinatorio como un nuevo campo de la matemática digno de un estudio formal; dejando ver a ésta como el dominio de un conjunto de técnicas o prácticas en la solución de una tipología de problemas.

En el libro Traité du triangle arithmétique (1653) Pascal publica un tratado acerca de las relaciones entre los coeficientes binomiales, las combinaciones y los polinomios; además demostró la identidad de Pascal donde expresa la suma de potencias de los primeros n números naturales [15].

Aunque Pascal y Fermat no expusieron sus resultados de los juegos de azar; más tarde en el libro De Ratiocinnis in ludo aleae de Huygens (1657) resolvió algunos problemas propuestos por ellos [16].

El primero en introducir el término “combinatoria” es Gottfried Leibniz en su obra Disertatio de arte combinatoria (1666); además realiza la construcción sistemática del conocimiento combinatorio que se había obtenido hasta la época[17].

Posteriormente Bernoulli en la obra Ars Conjectandi (1713) incorporó temas combinatorios fundamentales como la teoría de permutaciones y combinaciones; así como la derivación, las propiedades de los números, definió la combinatoria como el arte de enumerar todas las formas posibles en las que un número determinado de objetos n puede combinarse y demostró el teorema binomial para el caso n entero positivo mediante el uso de la fórmula para las combinaciones[18].

El símbolo (n, k) se introdujo en el siglo XIX cuando fue utilizado por Andreas Von Ettinghausen en 1878[4].

Tiempo después Abraham de Moivre publica su obra llamada "The Doctrine of Chance" (1718); considerado clave para el principio del estudio de la probabilidad [19].

Posteriormente Pierre Simon Laplace recopiló las ideas de Jacob Bernoulli, Abraham de Moivre, Thomas Bayes y Joseph Lagrange en su obra Théorie Analytique des Probabilités (1812) donde hace un extraordinario trabajo sobre el desarrollo de la teoría de la probabilidad; siendo la base matemática para desarrollar el análisis combinatorio[20].

La combinatoria entró en un periodo exponencial de desarrollo con el crecimiento de problemas de la matemática discreta que coadyuvan esta rama.

Las aportaciones de Galois(1831) fueron fundamentales para su investigación en teoría de grupos sobre permutaciones de las raíces de una ecuación polinómica[21].

Euler por su parte gracias a su célebre problema matemático de los siete puentes de Königsberg resuelto en 1736 dio origen a grandes resultados en combinatoria y teoría de grafos; así como el diseño de experimentos estadísticos [22].

F.P.Ramsey descubrió un importante teorema combinatorio de existencia (1930) trabajando en el contexto de la lógica de la matemática [23]. En la década de 1930 Paul Erdös y otros matemáticos húngaros dieron un nuevo impulso a la combinatoria [24].

En el libro Los fundamentos de la Teoría de la Probabilidad (Основы теории вероятностей) de Kolmogórov (1933) estructura el sistema axiomático y formalizado de la teoría de la probabilidad utilizando la teoría de conjuntos [25].

Años después en la revista acta mathemática Polya escribe un artículo titulado enumeración combinatoria para grupos, grafos y compuestos químicos (1937), desarrollando una poderosa técnica para resolver problemas de enumeración; su método está basado en la teoría de grupos y ha tenido gran influencia en el desarrollo contemporáneo de la teoría combinatoria[26].

En los últimos años la combinatoria entró en un período de intenso desarrollo relacionado con el crecimiento general del interés hacia los problemas de la matemática discreta ejemplos de tales teorías son: las funciones multiplicativas estudiadas en teoría de números y combinatoria, introducidas en 1832 por el matemático alemán August Ferdinand Möbius[27].

Hassler Whitney (1933) a partir de su trabajo en teoría de gráficos sentó las bases del matroide, una noción fundamental en combinatoria y teoría de la representación moderna[28].

Las tablas de Young en 1900 sirvieron como objeto combinatorio relacionado con la teoría de representaciones y funciones simétricas. Al mismo tiempo tiene lugar un gran desarrollo de las ramas más ricas en aplicaciones inmediatas, tales como la optimización en situaciones aleatorias reales de combinatoria [29].

En el libro Principles of combinatorics (Berge, 1968) propone describir la combinatoria como el estudio de las configuraciones formadas con los elementos de un conjunto; entendiendo por tales las aplicaciones del conjunto en otro, posiblemente provisto de cierta estructura que satisfagan unas restricciones determinadas [30].

Es en el siglo XX con el advenimiento de las computadoras que fue posible el análisis sistemático de los procesos y los algoritmos utilizados para generar permutaciones y combinaciones masivas. Además el análisis combinatorio busca principalmente determinar la existencia de configuraciones finitas y, si existen, encontrar el número posible de tales configuraciones [4].

III. Teoría de Conjuntos

En el siglo XIX emerge la teoría de conjuntos gracias a los estudios de George Cantor (1845 – 1918). A través de la teoría de conjuntos se inicia el estudio formal de los subconjuntos y partir de estos viene ligado el problema de demostrar la existencia de subconjuntos de elementos de un conjunto finito dado y que satisfacen ciertas condiciones. Entonces se podría decir que la teoría de conjuntos con el formalismo moderno puede ser otra presentación del conteo hacia la combinatoria[31].

Un conjunto es una colección de objetos considerada como un todo, estos objetos se llaman elementos que cumplen una propiedad; se dice entonces que un conjunto es una multiplicidad considerada como la unidad $\{A_1, A_{2,}A_3A_n\}$[32].

Existen dos formas de asignar los conjuntos; extensión y por comprensión, para expresar que el conjunto K consta de los elementos {a, b, c} escribimos $K = \{a, b, c\}$; con ello se da la **extensión** del conjunto K al enunciar cada una de las unidades que lo componen, este método es el más frecuente al designar para pocos elementos. Por otra parte los conjuntos infinitos solo pueden definirse por **comprensión;** es decir dando un criterio que permita reconocer para cada elemento si pertenece o no al conjunto[33] .

Los axiomas formulados por Ernst Zermelo y Adolf Fraenkel, en1908, son un sistema axiomático concebido para formular la teoría de conjuntos[31].

Axioma de extensionalidad.

$$\forall a(a \in X \leftrightarrow a \in Y) \leftrightarrow \mathrm{X} = \mathrm{Y} \quad (1)$$

Axioma del conjunto vacío.

$$\exists \emptyset \mid \forall a(a \notin \emptyset) \quad (2)$$

Axioma del conjunto pares

$$\forall x, y \mid \exists \mathrm{z};\ \forall a(a \in z \leftrightarrow a = x \text{ v } a = y) \quad (3)$$

Axioma del conjunto unión.

$$\forall x \mid \exists \mathrm{y}\ \forall a(a \in y \leftrightarrow\ \exists \mathrm{z}(\mathrm{z} \in x\ \wedge\ a \in z) \quad (4)$$

Axioma del conjunto potencia.

$$\forall x\ |\exists \mathrm{y} \forall z(z \in y\ \leftrightarrow \forall a(a \in z \rightarrow a \in x) \quad (5)$$

Esquema axiomático de especificación

$$\forall x|\ \exists \mathrm{y} \forall a\big(a \in y \leftrightarrow\ a \in x \wedge (a)\big) \quad (6)$$

Esquema axiomático de reemplazo

$$\forall a, \exists \mathrm{b}|(\forall x \in a \exists \mathrm{y} \in b \wedge (x, y) \quad (7)$$

Axioma de infinitud.

$$\exists \mathrm{x}|\emptyset \in x \wedge (\forall y \in x \colon S(y) \in x \quad (8)$$

Axioma de regularidad.

$$\forall x \in y|\ y \in x \wedge \mathrm{x} \cap = \emptyset \quad (9)$$

Lema de Zorn

$$\forall x \exists \mathrm{f} \colon \mathrm{x} \rightarrow \bigcup x\ \forall a(a) \in x \wedge a \neq \emptyset \rightarrow \mathrm{f}(a) \in a \quad (10)$$

Definición: La unión de dos conjuntos A y B es el conjunto;

$$A\ \cup \mathrm{B} = \{\mathrm{x}|\mathrm{x} \in \mathrm{A}\ \ \mathrm{x}\ \in\ \mathrm{B}\ \} \quad [32]\ (11)$$

$$A \subset \mathrm{A} \cup \mathrm{B}\ \subset \mathrm{A} \cup \mathrm{B}; \quad (12)$$

Definición: La intersección de los conjuntos A y B es el conjunto:

$$A\ \cap \mathrm{B} = \{\mathrm{x}|\mathrm{x} \in \mathrm{A}\ \wedge\ \mathrm{x}\ \in\ \mathrm{B}\ \} \quad [32]\ (13)$$

$$\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \subset \mathrm{A}, \mathrm{A} \cap \mathrm{B}\ \subset \mathrm{B} \quad (14)$$

Se cumplen las siguientes Propiedades para la unión e intersección de dos conjuntos cualesquiera[33]:

Conmutativa de la unión:

$$A \cup \mathrm{B} = \mathrm{B} \cup \mathrm{A} \quad (15)$$

Asociativa de la unión:

$$(A \cup \mathrm{B}) \cup \mathrm{C} = A \cup (\mathrm{B} \cup \mathrm{C}) \quad (16)$$

Conmutativa de la intersección:

$$\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \mathrm{B} \cap \mathrm{A} \quad (17)$$

Asociativa de la intersección:

$$A \cap (\mathrm{B}\ \cap \mathrm{C}) = (A \cap \mathrm{B}) \cap \mathrm{C} \quad (18)$$

Distributiva de la intersección:

$$A \cap (\mathrm{B}\ \cap \mathrm{C}) = (A\ \cap \mathrm{B}\ ) \cup (A \cap \mathrm{C}) \quad (19)$$

Distributiva de la unión:

$$A\ \cup (B \cap \mathrm{C}) = (\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \cap (\mathrm{A} \cup \mathrm{C}) \quad (20)$$

Idempotente en la unión:

$$A \cup \mathrm{A} = \mathrm{A} \quad (21)$$

Idempotente en la intersección:

$$A \cap \mathrm{A} = \mathrm{A} \quad (22)$$

Elemento neutro unión:

$$A \cup \emptyset = \mathrm{A} \quad (23)$$

Elemento neutro de la intersección:

$$A \cap \mathrm{U} = \mathrm{A} \quad (24)$$

Inverso de la unión:

$$A \cup \bar{A} = U \quad (25)$$

Elemento inverso de la intersección:

$$A \cap \bar{A} = \emptyset \quad (26)$$

Dominación

$$A \cup \mathrm{U} = \mathrm{U} \quad (27)$$

Dominación

$$A \cap \emptyset = \emptyset \quad (28)$$

Absorción en la unión:

$$A \cup (\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \mathrm{A} \quad (29)$$

Absorción intersección:

$$A \cap (A \cup \mathrm{B}) = A \quad (30)$$

Sea X el conjunto universal y *A* un conjunto arbitrario el **complemento** del conjunto *A* es el conjunto:

$$A^c = \{x | x \in X, x \notin A\} \text{ [32]} \quad (31)$$

Propiedades:

$$(A^c)^c = A \quad (32)$$

$$A \cup A^c = X \quad (33)$$

$$A \cap (A^c) = \Phi \quad (34)$$

De Morgan:

$$(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})^c = A^c \cap B^C (\mathrm{A} \cap \mathrm{B})^c = A^c \cup B^C \quad (35)$$

De Morgan:

$$(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})^c = A^c \cup B^C \quad (36)$$

La diferencia entre los conjuntos:

$$A - B = \{x | \mathrm{x} \in A \wedge \mathrm{x} \notin B\} \quad (37)$$

Si:

$$A\text{-}B = A \cap B^C \rightarrow A - (B \cap \mathrm{C}) = (A - B) \cup (A - \mathrm{C}) \quad (38)$$

Demostración:

$A - (B \cap \mathrm{C}) = A \cap (\mathrm{B} \cap \mathrm{C})^c = (A^c \cup (\mathrm{B} \cap \mathrm{C}))^c$;

$= ((A^c \cup \mathrm{B}) \cap ((A^c \cup \mathrm{C}))^c = (A^c \cup \mathrm{B})^c \cup (A^c \cup \mathrm{C})^c$;

$(A \cap B^C) \cup (\mathrm{A} \cap C^c) = (\mathrm{A} - \mathrm{B}) \cup (\mathrm{A} - \mathrm{C})$.

IV. SUBCONJUNTOS

Sean A y B dos conjuntos. Donde A está contenido en B o que es un subconjunto de B, y lo notaremos por A ⊆ B, si cada elemento de A es un elemento de B; es decir, A ⊆ B ⇐⇒ ∀x; (x ∈ A⇒ x ∈ B). También puede decirse que B contiene a A:

$$\mathrm{B} \supseteq \mathrm{A}. \text{ [33]} \quad (39)$$

En caso contrario cuando un conjunto A no esté contenido en otro conjunto B se tiene:

A ⊈ B ⇐⇒ ¬(A ⊆ B); ⇐⇒ ¬ [∀x (x ∈ A ⇔ x ∈ B)]; ⇐⇒ ∃x: [¬(x ∈ A =⇒ x ∈ B)]; ⇐⇒ ∃x: [¬ (¬(x ∈ A) ∨ (x ∈ B))]; ⇐⇒ ∃x: [¬x ∈ A) ∧ ¬(x ∈ B)]; ⇐⇒ ∃x: (x ∈ A ∧ x /∈ B). (40)

Si A ⊆ B y además B tiene un elemento que no está en A, diremos que A está estrictamente incluido en B o que A es un subconjunto propio de B y se denota por:

De (32) se deduce A ⊂ B. A ⊂ B ⇐⇒
A ⊆ B ∧ [∃x: (x ∈ B ∧ x ∈/ A)] (41)

Sea U el conjunto universal y A un conjunto cualquiera.
A ⊆ U; x ∈ A ⇔ x ∈ U, ∀x (x ∈ A ⇔x ∈ U) ∴ A ⊆ U.

Sea A un conjunto cualquiera; entonces:
∅ ⊆ A.; x ∈ ∅ ⇔ x ∈ A, ∀x (x ∈ ∅ ⇔ x ∈ A) ∴∅ ⊆ A (42)

Sean A y B dos conjuntos cualesquiera de un universal arbitrario U:
A = B ⇔ A ⊆ B y B ⊆ A.

Siendo demostrado como:
A = B ⇔ A ⊆ B ∧ B ⊆ A;
(A = B ⇔ A ⊆ B) ∧ (A = B⇔ B ⊆ A)
A = B ⇔ A ⊆ B ∧ B ⊆ A;
"Si." A ⊆ B ∧ B ⊆ A ⇔ A = B:

En efecto, (A ⊆ B) ∧ (B ⊆ A) ⇔
[(∀x (x ∈ A ⇔ x ∈ B)] ∧ [(∀x (x ∈ B ⇔ x ∈ A)];
A = B (43)

Sean A, B y C tres conjuntos cualesquiera de un universal arbitrario U.
Si A ⊆ B y B ⊆ C; entonces: A ⊆ C [32].
Sea x un elemento arbitrario del universal U de A ⊆ B, se sigue que:
x ∈ A ⇔ x ∈ B
De B ⊆ C, ∴ x ∈ B =⇒ x ∈ C.
x ∈ A ⇔ x ∈ C
∀x (x ∈ A ⇔ x ∈ C) ∴A ⊆ C
De (1) A = B ⇐⇒ ∀x [(x ∈ A =⇒ x ∈ B) ∧ (x ∈ B ⇔ x ∈ A)] (44)

V. FUNCIONES

Definición:
Sean *A* y *B* dos conjuntos. El producto cartesiano de *A* y *B* denotado por *AxB* es el conjunto:

$$AxB = \{(a, b) | \; a \in A \wedge b \in B\} \text{[34]} \quad (45)$$

Dada una pareja ordenada se tiene por definición $(a, b) \in AxB \leftrightarrow (a \in A \wedge b \in B)\}$ y sean *X* y *Y* conjuntos[32].

Una relación *R* de *X* en *Y* es una pareja ordenada *(R,XxY)*donde $R \subseteq XxY$.

Si R es relación X en Y =(x,y)[32].

Una función es una relación binaria F que está sujeta a ciertas condiciones y es uno de los conceptos de relevancia en matemática. Las funciones permiten conocer propiedades de conjuntos a través de otros mediante la propiedad:

$$F\text{: }\{\forall\ x \in dom(F)\ \exists\ y| < x, y > \in F\}[34]. \qquad (46)$$

Se denota como y=F(x); $\therefore$ $\mathrm{Im(F)} = \{\mathrm{F}(x)|x \in \mathrm{Dom(F)}\}$, se dice que F es función de A en B y se escribe: $\mathrm{F{:}\,A} \to B$.

Si $Dom(F) = \{A, Im(F) = F[A] \subseteq\ B\ VF\}$es una función y se indica que B es el codominio o contra dominio de F; ya que $Im(F) \subseteq B$ entonces el contradominio de una función es cualquier conjunto que contenga a la imagen.

En otras palabras una función de F de $A\ \to B$ es una correspondencia entre elementos de A y elementos de B tal que a cada elemento de A le corresponde un único elemento de y [32].

Para cada conjunto $X, \nabla x = \{(x,x)|x \in X\}$ es una función de x en x, llamada función identidad. Sean X, Y dos conjuntos donde $y_0 \in Y$ un elemento fijo F=$\{(\mathrm{x}, y_0)\,|x \in X\}$es una función de X en Y llamada función constante.

F es uno a uno o inyectiva $\leftrightarrow y \in Im(F) \exists x| < \mathrm{x,y} > \in \mathrm{F} \therefore$ $F(x) =;, \to x, z \in Dom(F) y\ x \neq z \to F(x) \neq F(z)$;

o bien si:

$\{x, z \in Dom(F) \wedge \mathrm{F(x) = F(z) \to x = z}\}$[35].

Una función $\mathrm{F{:}\,X} \to Y$ es suprayectiva si la: $\mathrm{I}m(F) = Y$.

Debido que para cualquier función $\mathrm{F{:}\,X} \to Y$ siempre se tiene que $Im(F) \subseteq Y$ será razón suficiente que $Y \subseteq Im(F) \subseteq \to$ $\forall\ y \in Y\ \exists\ x \in X|F(x) = y$.

Una función es biyectiva si $\leftrightarrow$es inyectiva y suprayectiva, donde todo elemento del codominio de una función F es imagen de un solo elemento del dominio de la función[34].

Principio aditivo y multiplicativo:

Estos dos principios son los dos más fundamentales para el conteo y el análisis combinatorio. Algunos autores toman estos principios como parte de los axiomas del análisis combinatorio[36].

Teorema1.2.1 (principio aditivo):

Sean A y B dos conjuntos finitos disjuntos, es decir $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}\ \neq \emptyset$; $\to |\mathrm{A} \cup \mathrm{B}\,| = |\mathrm{A}\,| \cup |\,\mathrm{B}|.\ \neq \emptyset$; si un suceso A puede ocurrir de n maneras y otro suceso B puede ocurrir de m maneras y no pueden ocurrir ambos simultáneamente; entonces el suceso A o B puede ocurrir de m+n maneras[37].

Demostración:

Séase $|A\,| = n\ y\ |B| = m$ existe una biyección en $A\ y\ \mathbb{N}_n$ y otra biyección entre $B\ y\ \mathbb{N}_m$.

Por lo tanto $|A\,|+|B| = m + n$ existe una biyeccion entre $A \cup B \wedge \mathbb{N}_{n+m}$.

Sea h: $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} \to \mathbb{N}_{mn+m}$ |

$$h(x) = \begin{cases} h(i) & si\ i \leq n \\ g(i-m) & si\ m < i \leq m+n \end{cases}$$

$f{:} \to \mathbb{N}_n \to \mathrm{A} \wedge\ g{:} \to \mathbb{N}_n \to \mathrm{B} \therefore |\mathrm{A}\,| \cup |\mathrm{B}| = m + n$

Teorema 1.2.2 si $A_1, \dots \dots \dots A_n$ son conjuntos finitos disjuntos a pares $n > 1, \to$
$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \dots \dots A_n| = |A_1|+|A_2| \dots \dots |A_n|$.

Demostración por inducción:

En el caso de n=2, $\to$ $|A_1 \cup A_2 \cup \dots \dots .\,A_n| = |A_1|+|A_2| \dots \dots |A_n| \to$ si se toma B=$A_1 \cup A_2 \cup \dots \dots \dots A_n$ $\to$ $B \cap A_{n+1} = \emptyset \therefore |B \cup A_{n+1}|$=$|B| \cup$
$|A_{n+1}|$=$|A_1|+|A_2| \dots \dots |A_n| + |A_{n+1}|$.

Ley de la tricotomía

Dado dos números reales a y b se cumple una justamente una de las siguientes propiedades[35] $a < b$; $a = b$; $a > b$.

Teorema1.3 (*principio multiplicativo*) sean A y B conjuntos finitos cualesquiera $AxB = \{(a,b); a \in A, b \in B\}$$\to$$|\mathrm{AxB}| = |\mathrm{A}|\,.\,|\mathrm{B}|$[36].

Demostración:

Sean A= $\{a_{1,}a_{2,\dots\dots\dots\dots\dots}a_{n,}\}$ y B= $\{b_{1,}b_{2,\dots\dots\dots\dots\dots}b_{n,}\}$ el producto cartesiano en una matriz AxB. Si se tienen dos conjuntos de k y n elementos respectivamente y queremos escoger dos elementos de modo que uno sea del primero y el otro del segundo, se puede hacer de k x n maneras[37].

Debiendo:

$$\begin{pmatrix} (a_{1,}b_1) & (a_{1,}b_2) & \cdots & (a_{1,}b_m) \\ (a_{2,}b_1) & (a_{2,}b_2) & \cdots & (a_{1,}b_m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{n,}b_1) & (a_{2,}b_2) & \cdots & (a_{n,}b_m) \end{pmatrix}$$

La cual es de dimensión $n.m$ =$|A|+|B|$

Teorema1.3

Sean $\{A_1 \dots \dots \dots .\,A_n\}$ conjuntos finitos cualesquiera $|A_1\mathrm{x}\,A_2\mathrm{x} \dots \dots A_n| =\ |A_1|.\,|A_2| \dots \dots |A_n|$

Demostración por inducción sobre n sea: $|A_1\mathrm{x}\,A_2\mathrm{x} \dots \dots .\dots \dots A_n| =\ |A_1|.\,|A_2| \dots \dots |A_n|$ siendo B=A_1x … … $A_n$$\to$B x A_{n+1}=$|B|.\,|A_{n+1}| =$
$|A_1|.\,|A_2| \dots \dots \dots |A_n|.\,|A_{n+1}|$

Si un objeto puede escogerse entre m posibles:

Principio de inclusión exclusión:

Sean A y B dos conjuntos finitos:
$|A\ \cup B| = |A\ |$+$|B|$-$|A\ \cap B|$

Si tenemos la colección $A_i(1 \leq i \leq n)$ [36].

$$|A_1 \cup\ A_2 \cup \dots \dots .\cup A_n| - |\sum_{i=1}^{n} |A_i| \sum_{\substack{i,j,k: \\ 1 \leq\ i\ <\ j \leq n}} |A_i \cap A_j|$$

$$+ \sum_{\substack{i,j,k: \\ 1 \leq\ i\ <\ j <\ k \leq n}} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \cdots \dots + (-1)^{n-1}|A_1 \cap A_2 \dots . \cap A_n|$$

VI. Cálculo combinatorio

Permutaciones

Una permutación de algunos objetos es un ordenamiento o arreglo lineal particular de los objetos: P (n, k) y cuenta dos cosas simultáneamente: la cantidad de formas de elegir y ordenar k de n objetos[39]. Un caso especial útil es k = n en el que simplemente estamos contando el número de formas de ordenar todos los n objetos; esto es: $n\ (n - 1)\ \ldots(n - n + 1) = n!$, lo anterior se formaliza con el uso del lenguaje de las funciones matemáticas: como una función biyectiva de I_n en un conjunto de n elementos. Si A es un conjunto finito, toda función inyectiva de A en A es biyectiva[36].

Sea $A = \{a_1 \ldots \ldots .. a_n\}$; $F{:}A\rightarrow A$ es una permutación de A, en estas permutaciones intervienen todos los elementos. El número de permutaciones de n objetos diferentes tomados de r en r está dado por la fórmula:

$$P(n,r) = n(n-1)(n-2)\ldots\ldots.(n-r+1), r \leq n.$$

El número total de permutaciones de n objetos diferentes tomados de n en n está dada por:

$$P(n,n) = n(n-1)(n-2)\ldots\ldots 1 = n![38].$$

Permutaciones con repetición: se llama permutación con repetición de n elementos distribuidos en k grupos de $\{a_1, a_2, \ldots\ldots a_{k-1}, a_k\}$ elementos indistinguibles $\{a_1 + a_2 + \cdots .. a_{k-1} + a_k$=n}, las configuraciones con n elementos excluyendo las reordenaciones son:

$$PR_n^{a_1,a_2,\ldots\ldots a_{k-1},a_k} = \frac{n!}{a_1 \cdot a_2! \cdot\ldots\cdot a_{k-1}! \cdot a_{k!}} \text{ [39].}$$

Permutaciones circulares:

Una permutación circular de orden $r \leq n$ de n objetos es una disposición de r en r, *posiciones* en la circunferencia. En r elementos de $\binom{n}{r}$ son las formas distintas de colocarlos, con los elementos:

$a_{f(1)}, a_{f(2)}, \ldots\ldots, a_{f(r)}$tendremos r! configuraciones en la circunferencia, al trasladar los elementos una posición a la derecha se tiene:

$$a_{f(1)}a_{f(2)\ldots\ldots\ldots}a_{f(r)} = a_{f(2)}a_{f(3)}\ldots\ldots.a_{f(1)} = a_{f(r)}a_{f(1)}\ldots..a_{f(r-1)} \therefore$$

$$\binom{n}{r}\frac{r!}{r} = \binom{n}{r}(r-1)![36].$$

Combinaciones

Se llaman combinaciones de elementos A= $\{a_1 \ldots\ldots\ldots a_n\}$ tomados de n en n a los subconjuntos de n elementos del conjunto A se denota como:

C(n,m) =C$\binom{n}{m}$ donde $0 \leq n \leq m$.

Para calcular C$\binom{n}{m}$ se busca cada aplicación inyectiva $f{:}\mathbb{N}_m \rightarrow m \subset A = S\{f(1), f(2)\ldots\ldots, f(k)\}$[38].

También cada uno de los diferentes grupos tomando todos o parte de los elementos del conjunto, sin considerar el orden de los elementos tomados, se les llama combinación.

El número de combinaciones de n objetos diferentes tomados de r en r está dado por $C(n,r) = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(n-r+1)}{r!}$ $r \leq n$ multiplicando por $\frac{(n-r)!}{(n-r)!}$

Se obtiene:

$$C(n,r) = \frac{n(n-1)\ldots.(n-r+1)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(n-r)!}{r!\ (n-r)!}\ .$$

El número de combinaciones de n elementos diferentes tomados de r en r puede obtenerse:

$C(n,r) = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$ $r \leq n$ [38].

Combinaciones con repetición:

Sea $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$un conjunto de n elementos. Una combinación con repetición de n elementos tomados de k en k este conjunto equivale a una lista ordenada de longitud k donde estos se pueden repetir y existe una correspondencia entre las combinaciones de orden k y las soluciones enteras no negativas de la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots\ldots.x_1 = k$ cada $x_1 \geq 0$ es a_i es una función biyectiva $CR(n,k) = \binom{n+k-1}{k}$.

Si n, k >⟶ $CR(n,k)$= $CR(n-1,k)$+ $CR(n,k-1)$;

$CR(n,1) = n \wedge CR(1,k) = 1$

$\exists a_1$,se toma elementos de k-1 en k-1∴

$CR(n,k)$ =+ $CR(n-1,k) + CR(n,k-1)$.

Si k≠1,n≠1;

$CR(n,1) = n \wedge CR(1,k) = 1$

$CR_k^n = R_{k+n-1}^n = \binom{k+n-1}{n} = \frac{(k+n-1)!}{n!(k-1)!}$ [39].

Variaciones

Sea X un conjunto de k elementos y otro conjunto Y de n elementos:

$S = \{f{:}X \rightarrow Y; f\ inyectiva\}$;

la aplicación de la función es:

$f(x_1), f(x_2)\ldots\ldots\ldots.f(x_n) \rightarrow f(x_1) \in$Y.

$f(x_2) \in$ Y\\$\{f(x_2)\}$ = {y ∈ Y; y $\neq f(x_1)$}

$f(x_3) \in$ Y\\$\{f(x_1), f(x_2)\}$ =
{y ∈ Y; y $\neq f(x_1)$, y $\neq f(x_2)$}

$f(x_k) \in$ Y\\$\{f(x_1), \ldots..f(x_{k-1})\}$ =
{y ∈ Y; y $\neq f(x_1)\ldots., \neq f(x_{k-1})$}

El total de aplicaciones biyectivas de X ⟶B se llaman variaciones de n elementos tomados de k, por el principio del producto:

$$V(n,k) = n(n-1)(n-2)\ldots\ldots.(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} \text{ [38].}$$

Variaciones con repetición:

Sea un conjunto de m elementos con la notación:

$C = \{c_1, c_1, \ldots., c_m\}$ se pueden formar;$X_n = \{(c_{i1}, c_{i1}, \ldots\ldots c_{in}){:}\, c_{i1} \in C, j = 1, \ldots\ldots, n\}$ el número de elementos de $X_{n,}$con repetición de m elementos tomados de n en n ∴ $X_{m=}m^n$[39].

El factorial de un entero positivo n lo describe Christian Kramp en 1808[40] como**:**

Para cada $n \in \mathbb{N}$ factorial será $n! =$
$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots\cdots (n-1)n = \prod_{k=1}^{n} k$;

$$n! = \begin{cases} 1, & si\ n = 0 \\ n-1!\,n & si\ n > 0 \end{cases}$$

Propiedades

$n! = n\,(n-1)$¡ ; $n \geq 2$;

$Si\ n! = m!\,; \Leftrightarrow\ n = m\ \forall\, n, m \in Z^+$-{1};

n (n!) = (n + 1)! − n!

Teorema del binomio

El desarrollo de la potencia *n-ésima* (siendo n, entero positivo) de un binomio[37].

Sea $1 \leq m \leq n-1 \rightarrow C\binom{m-1}{n-1} + C\binom{m}{n-1} = C\binom{m}{n}$.

Demostración:

$!C\binom{m}{n-1} + C\binom{m-1}{n-1} = \frac{(n-1)!}{m!(n-1-m)!} + \frac{(n-1)!}{(m-1)!(n-1-(m-1)!} = \frac{(n-1)!}{m!(n-m-1)!} + \frac{(n-1)!}{(m-1)!(n-m)!}$
$= \frac{(n-1)!(n-m)}{m!(n-m)!} + \frac{(n-1)!m}{m!(n-m)!} = \frac{(n-1)!(n-m)+(n-1)!m}{m!(n-m)!}$
$= \frac{n!}{m!(n-m)!} = \binom{m}{n}$.

Para todo $n \in \mathbb{N}$, y cualesquiera números reales *a,b* se tiene que : $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i\, a^{n-i} \cdot b^i$ ·

Demostración por inducción sobre *n:*
$n = 0, (a+b)^0 = 1 \wedge \sum_{i=0}^{n} C_o^i\, a^{n-i} \cdot b^i = C_0^0 a^0 \cdot b^0 = 1 \therefore (a+b)^0 = \sum_{i=0}^{0} C_o^i\, a^{0-i} \cdot b^i$.

Para $n - 1 \geq 0$, $(a+b)^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^i\, a^{n-1-i} \cdot b^i$
$(a+b)^n = (a+b)(a+b)^{n-1}$
$= (a+b)\sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^i\, a^{n-1-i} \cdot b^i$
$= a\sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^i\, a^{n-1-i} \cdot b^i + b\sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^i\, a^{n-1-i} \cdot b^i$
$= \sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^i\, a^{n-1} \cdot b^i + \sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^i\, a^{n-1-i} \cdot b^{i+1}$

Como:
$C_{n-1}^n = 0 \rightarrow \sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^i\, a^{n-i} \cdot b^i = \sum_{i=0}^{n} C_{n-1}^{i-1}\, a^{n-i} \cdot b^i$

Se define:

$$C_{n-1}^{-1} = 0 \rightarrow (a+b)^n \sum_{i=0}^{n} C_{n-1}^i\, a^{n-i} \cdot b^i + \sum_{i=0}^{n} C_{n-1}^{i-1}\, a^{n-i} \cdot b^i$$

$= \sum_{i=0}^{n} (C_{n-1}^i + C_{n-1}^{i-1})\, a^{n-i} \cdot b^i$
$\therefore (a+b)^n \sum_{i=0}^{n} C_n^i\, a^{n-i} \cdot b^i$

Coeficiente binomial

El número de subconjuntos de k elementos a partir de un conjunto *n* se denota $\binom{n}{k}$. Los números $C_{(n,k)}$ se conocen como coeficientes binomiales donde $C_{(n,k)} = 0;\ si\ k > n$:
$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots \ldots \ldots (n-k) + 1; \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots (k-1) \cdot k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

El cuál es el coeficiente del termino $x^{n-k}y^k$ obtenido al desarrollar $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$.

En el libro "*raité du triangle arithmétique*" (Pascal, 1654) estudia lo que hoy se conoce como triángulo de Pascal que es un arreglo de números donde la posición *k* en la fila *n* del triángulo de Pascal es igual al coeficiente binomial $\binom{n}{k}$[36].

Cumple con las siguientes propiedades[37]:
Sean $\forall n, k \in Z^+ | n \geq k$:

. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$;
. $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$;
. $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$;
. $k\binom{n}{k} = (n-k+1)\binom{n}{k-1}$;
. $\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \cdots \ldots + \binom{n+k}{k} = \binom{n+k+1}{k}$;
. $\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \binom{n+2}{n} + \cdots \ldots + \binom{n+k}{n} = \binom{n+k+1}{n+1}$;
. $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots \binom{n}{n} = 2^n$;
. $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^n\binom{n}{n} = 0$

VII. DIDÁCTICA DE LA COMBINATORIA MEDIANTE APRENDIZAJE BASADO EN PROBLEMAS (ABP)

A través del enfoque didáctico ABP se proponen problemas combinatorios, donde se pretende desarrollar habilidades cognitivas como; conjeturas, generalización la optimización y el pensamiento sistemático, además habilidad para identificar, analizar y solucionar problemas.

Una de las principales características del ABP está en fomentar en el alumno el aprendizaje autodirigido y el pensamiento crítico, además el conocimiento sobre los contenidos en la propia experiencia de trabajo, donde él tiene la posibilidad de analizar en la práctica aplicaciones en torno al problema. Se pretende que el estudiante se involucre en el proceso de aprendizaje propiciando su interés para enfrentarse a problemas contextualizados. El enfoque de ABP permite que bajo el principio de usar problemas centrados en el aprendizaje como punto de partida, el alumno desarrolle competencias tanto de la toma de decisiones como en el momento de proponer estrategias de solución. Para la adquisición y la integración de los nuevos conocimientos[41].

Mediante el ABP el alumno empleará modelos matemáticos que le permitan enfrentarlo a situaciones reales donde la actividad gire en torno a la discusión de un problema y el aprendizaje surja de la experiencia sobre ese problema, para traducirlo en un lenguaje matemático donde después le permitirá modelarlo ,simularlo y permita la reflexión sobre su propio aprendizaje. En esta metodología, el docente tiene un rol claramente definido:

Es el facilitador del aprendizaje y su labor es orientar, guiar, moderar y facilitar una adecuada dinámica de grupo, es quien custodia el proceso de aprendizaje del grupo y guía el descubrimiento. Tiene la responsabilidad de buscar, diseñar y plantear problemáticas con un alto grado de significatividad, debe contribuir en el esclarecimiento de las dudas, ayudar a plantear situaciones problema, sugerir y evaluar estrategias de solución así como determinar las etapas y metas de la experiencia asesorando en el diseño de las alternativas de solución del problema[42].

Polya en su libro ¿Cómo plantear y resolver problemas? (1945)[43]. determina una propuesta la cual está enfocada a la forma como se deben asumir y enfrentar los problemas al interior del estudio de la matemática. Sus aportes se encaminan a orientar acerca del manejo de dichas situaciones en los procesos educativos, él comparte, además, la idea de que las estrategias y preguntas de un experto podrían ser modeladas por los docentes en el salón de clase.

Propone un plan, en el cual como primera fase es la comprensión del problema, en esta se ubican las estrategias que ayudan a representar y entender las condiciones iniciales del problema, se formulan preguntas como: ¿Cuál es la condición? ¿Es la condición suficiente para determinar la incógnita? ¿Es insuficiente? ¿Redundante? ¿Contradictoria?, como segunda fase; es la concepción de un plan y en esta se recomienda pensar en problemas conocidos que tengan una estructura análoga a la que se quiere resolver y así establecer un plan de resolución por medio de estrategias o algoritmos en donde propone formular preguntas: ¿Se conoce algún problema relacionado con éste? ¿Conoces algún teorema que te pueda ser útil? ¿Se puede plantear el problema de otra forma? .En la tercera fase es la ejecución de este plan y en esta se contemplan aspectos que ayudan a monitorear el proceso de solución del problema así como su demostración y la generalización del problema. La última fase es la visión retrospectiva, en donde a idea fundamental de esta fase, es tratar de resolver el problema de una forma diferente y analizar o evaluar la solución obtenida y si este mismo algoritmo se puede aplicar en algún otro problema.

La implementación basada en el método heurístico de Polya ayuda a resolver problemas combinatorios contextualizados.

Esta concepción permite en principio de colocar los problemas unos con relación a otros, a condición de tener una axiomática conveniente de la teoría por enseñar: las discusiones sobre la selección de la mejor axiomática sustentan la mayor parte de las investigaciones sobre los programas[43].

El pensamiento sistémico (PS) ayuda a construir un marco conceptual que permite representar problemas dentro de varios subsistemas o elementos interrelacionados llamados patrones ,la implementación permite el estudio de cualquier fenómeno y sistema enfatizando las relaciones entre las partes del mismo, en lugar de ver el sistema como un todo, este mismo comienza con la articulación del problema ,el análisis del sistema y finaliza con el uso de modelos que permitan la imitación o proceso o sistema del mundo real [44].

El PS es una herramienta dentro de la combinatoria donde para abordar diferentes problemas, estos se pueden contemplar como sistemas, por medio de la identificación de reglas y patrones que permitan llegar a su generalización[45].

VIII. PROBLEMAS DE APLICACIÓN

Problemas:

1)*Se quiere elegir a un comité de 3 personas de un total de 20 personas de las cuales una debe ser presidente, el otro secretario y un tesorero ¿De cuantas maneras se puede elegir dicho comité?*

Este problema típico de combinatoria donde orden de cada uno de los elementos es fundamental; esto es lo mismo que dar una función I_3 {1, 2,3}, pero se tiene que tomar en cuenta que no puede ser cualquier función, ya que la persona no puede ocupar dos cargos a la vez, esto es si se eligió a las personas A, B, C, ocupando los cargos de presidente (1), secretario (2) y tesorero (3)respectivamente; la función correspondiente a esta elección es $f(x) : \{1,2,3\} \rightarrow G$,donde G es el conjunto de las 20 personas y $f(1) = A, f(2) = B \ y \ f(3) = C$ donde $f(1) \neq f(2)$; $f(1) \neq f(3) \ y \ f(2) \neq f(3)$, la función debe ser inyectiva.

Definición 1:

Las ordenaciones de n elementos tomados de m en m son las funciones inyectivas $I_3\{1,2 \dots . m\}$ en el conjunto de estos n elementos es O_n^m.

Definición 2:

Las ordenaciones con repetición de n elementos tomados de m en m son las funciones de I m del conjunto de esos elementos y al número total lo detonaremos OR_n^m.

Proposición 1.2 si A es un conjunto con *m* elementos y B con un conjunto de *n* elementos, el número de maneras de escoger un elemento de A y un elemento de B es *m.n* por el teorema 1.3 sea A = $\{a_{1,\dots\dots\dots} a_n\}$ un conjunto de *n* elementos, *n*≥ 1 ,n(n-1) parejas ordenadas de $(a_{1,\dots\dots\dots} a_j)$ de elementos A $a_i \neq a_j$.

Demostración:

Sea $i \in I_n$ fija y sea $B_i = A - \{a_i\}$ el número de elementos de B_i es *n-1*

$\{(a_i, a_i\} \in AxA | a_i \neq a_i\} =$
$\bigcup_{i=1}^{n} (\{a_i\} \ x \ B_1) y (\{a_i\} \ x \ B_1) \cap (\{a_j\} \ x \ B_j) = \emptyset$ Si *i≠j*

$$card \bigcup_{i=1}^{n} (\{a_i\} \ x \ B_1) = \sum_{i=1}^{n} card(\{a_i\} \ x \ B_1)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} (n-1) = (n-1)$$

Hay $(n-1)$parejas ordenadas. El número de maneras de escoger la imagen de 1 es n el número de elementos de dar una función inyectiva de I_2 *en A*={ (*a*,*b*)∈ *AxA* |a ≠ b},la imagen de 1=*a* y la imagen e 2=*b:*

$f : \{I_2 \rightarrow A | f \ es \ inyectiva\} \rightarrow A = (a, b) \in A\mathrm{x}A | a \neq \mathrm{b}\}$

Definida F$(f) = (f(1), (f(2))$ es biyectiva:

O_n^2=n(n-1)=$\frac{n!}{(n-2)!}$

Considerando $f : I_3 \rightarrow A$ determinará:
$(a_1, a_2, a_3) \ B =$
$\{(a_1, a_2, a_3) \in AxAxA | a_1 \neq a_J$ si *i ≠ j i=1,2,3}*

Habrá entonces O_n^3=$O_n^2 \ (n-2) = n(n-1)(n-2) \frac{n!}{(n-3)!}$

Funciones inyectivas $I_3 \rightarrow A$.

$\therefore O_{20}^2 = \frac{20!}{2!(20-2)!} = \frac{20!}{2 \cdot 18!} = \frac{20 \cdot 19}{2} =$
$10 \cdot 19 = 190$ maneras.

2) a)¿Cuántos números de seis dígitos, significativos, se pueden escribir en un sistema binario?

b) ¿Cuántos hay que contengan la sucesión 01?

Solución:

El primer dígito siempre es 1, por lo tanto tenemos que ver las formas posibles de formar listas de 5 elementos con los dígitos 0 y 1: el total es 2^5= 32

Si queremos ver cuántos de éstos contiene la sucesión 01, esta sucesión puede ocupar una de las siguientes posiciones: 1 0 1 _ _ _, 1 _ 0 1 _ _, 1 _ _0 1 _, 1 _ _ _ 0 1.

Cada uno de estos casos tiene tres espacios vacíos, que se pueden rellenar con cualquiera de los dígitos 0 o 1.

Por lo tanto cada uno produce 2^3 números.

Llamamos A_1 a los números del tipo 1 0 1 _ _ _, A_2 a los del tipo 1 _ 0 1 _ _, A_3 a los del tipo 1 _ _0 1 _, yA_4 a los del tipo 1 _ _ _ 0 1.

Tenemos entonces, por el principio de inclusión–exclusión:
$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| =$

$|A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| - |A_1 \cap A_3| - |A_1 \cap A_4| - |A_2 \cap A_4|$.

Se tiene:

$|A_i| = 2^3$, y $|A_1 \cap A_3| = |A_1 \cap A_4| = |A_2 \cap A_4|\,| = 2$.

Por lo tanto:

$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4|.| = 4 \times 2^3 - 3 \times 2 = 32 - 6 = 26$.

3)¿Cuántos divisores positivos tiene el número 29338848000,¿Cuántos son múltiplos de 99? ¿Cuántos son múltiplos de 39?

Si d es un divisor de 29338848000 =
$2^8 \cdot 3^5 \cdot 5^3 \cdot 7^3 \cdot 11 \therefore d =$
$2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 5^{\alpha_3} \cdot 7^{\alpha_4} \cdot 11^{\alpha_5}$ con:
$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) \in \mathrm{A_1 x A_2 x A_3 x A_4 x A_5}$ donde:

$\mathrm{A}_1 = \{0,1,2 \ldots,8\}, \mathrm{A}_2 = \{0,1,2 \ldots,5\}, \mathrm{A}_3 = \{0,1,2,3\}, \mathrm{A}_4 = \{0,1,2,3\}, \mathrm{A}_5 = \{0,1\}$.

El número de divisores de 29338848000 es $|A_1 \mathrm{x}\, A_2 \mathrm{x}\, A_3 \mathrm{x}\, A_4 \mathrm{x}\, A_5| = 9 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 2$.

Si $d = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 5^{\alpha_3} \cdot 7^{\alpha_4} \cdot 11^{\alpha_5}$ es múltiplo de $99 \rightarrow \alpha_2 \geq 2\,; \alpha_5 = 1$.

En total, el número de divisores múltiplo de 99 es:
$|A_1 \mathrm{x} (A_2 - \{0,1\}) \mathrm{x}\, A_3 \mathrm{x}\, A_4 \mathrm{x}\, A_5 - \{0\}| =$
$9 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 1$
39=3·13 no es divisor de 29338848000 $\therefore$ 0

4) Un circuito eléctrico posee 10 interruptores. Teniendo en cuenta que cada interruptor tiene dos posiciones {1, 0}

a) ¿Cuántos estados diferentes puede tener el circuito según la posición de los interruptores?

b) ¿Cuántos estados tienen tres interruptores en posición 1 y el resto en posición 0?

Solución:

a) El circuito puede encontrarse en $VR_{2,10} = 2^{10}$ en estados distintos

b) El número de estados con tres interruptores en posición 1 es en $PR_{10}^{7,3} = \frac{10!}{7! \cdot 3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3!} = 120$.

5) Se considera el conjunto {1, 2, . . . , 20}. ¿De cuántas formas se puede elegir cinco elementos entre los que no haya dos consecutivos?

Solución:

Si hacemos una elección de cinco elementos $\{\{x_1, x_2 x_3 x_4 x_5\}$ ordenados de menor a mayor, entre los que no hay dos consecutivos, resulta:

$x_5 > x_4 + 1$, $x_4 > x_3 + 1$, $x_3 > , x_2 + 1$, $x_2 > x_1 + 1$, y por tanto, el conjunto $\{x_1, x_2 - 1, x_3 - 2, x_4 - 3, x_5 - 4\}$ está formado por cinco elementos distintos. Y recíprocamente, dado un conjunto $\{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}$ de cinco elementos distintos, que podemos suponer ordenados de menor a mayor, resulta que el conjunto $\{y_1, y_2 + 1, y_3 + 2, y_4 + 3, y_5 + 4\}$ de cinco elementos entre los que no hay dos consecutivos;$\{\{x_1, x_2 x_3 x_4 x_5\}$, $\{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}$ formados por cinco elementos distintos. El valor mínimo de $x_1$es 1, y el valor máximo de x_5 es 20, por lo tanto el valor mínimo de y_1 es 1, y el valor máximo de y_5 es 20 − 4 = 16. El número de conjuntos de cinco elementos es $\binom{16}{5}$= 4368.

6) ¿Cuántos números enteros positivos menores que 120 son primos?

Solución: Los números primos que aportarán números compuestos son: 2, 3, 5 y 7, ya que $11^2 = 121 > 120$. Podemos entonces calcular los números primos menores que 120 que son múltiplos de 2, 3, 5, ó 7; el número de elementos de este conjunto es:

$|S_2 \cup S_3 \cup S_5 \cup S_7| = (|S_2| + |S_3| + |S_5| + |S_7|) - (|S_2 \cap S_3| + |S_2 \cap S_5| + |S_2 \cap S_7| + |S_3 \cap S_5| + |S_3 \cap S_7| + |S_5 \cap S_7|) + (|S_2 \cap S_3 \cap S_5| + |S_2 \cap S_3 \cap S_7| + |S_2 \cap S_5 \cap S_7| + |S_3 \cap S_5 \cap S_7|) - |S_2 \cap S_3 \cap S_5 \cap S_7|$

$=\left(\frac{120-1}{2} + \frac{120-1}{3} + \frac{120-1}{5} + \frac{120-1}{7}\right) - \left(\frac{120-1}{6} + \frac{120-1}{10} + \frac{120-1}{14} + \frac{120-1}{15} + \frac{120-1}{21} + \frac{120-1}{35}\right) + \left(\frac{120-1}{30} + \frac{120-1}{42} + \frac{120-1}{70} + \frac{120-1}{105}\right) - \frac{120-1}{210} =$
138-53+7-0=92

De éstos tenemos que excluir los números 2, 3, 5 y 7, y como el número 1 no es primo, el número de enteros primos positivos menores que 120 es:

119 − (92 − 4) − 1 = 30.

Podemos comprobar el resultado, ya que los enteros primos pedidos son: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113.

7) *En los lenguajes de programación se utilizan identificadores para hacer referencia a varios objetos: constantes, variables, funciones, Normalmente un identificador está formato por una serie de caracteres, letras del alfabeto ('a',..,'z','A',..,'Z') y dígitos numéricos ('0',..,'9') empezando siempre por una letra. Por ejemplo, a1, Jet, NUM, n36, AddNode son identificadores válidos, pero 1a, 3jda no se considerarían validos porque empiezan por un digito o contienen caracteres que no son letras ni dígitos.*

(a) ¿Cuantos identificadores de 8 caracteres podemos formar? ¿Y si todos los caracteres deben ser diferentes?

(b) Si consideramos identificadores con un máximo de 6 caracteres, ¿cuántos identificadores podemos formar con todos los caracteres diferentes?

(c) Si se consideran equivalentes las letras mayúsculas y minúsculas, ¿cuántos identificadores con un máximo de 6 caracteres diferentes podremos formar?

(d) ¿Cuántos de los identificadores del apartado anterior tendrán, al menos, una vocal?

Solución: Suponemos que tenemos 26 letras minúsculas, 26 mayúsculas y 10 dígitos:

(a) El número total de identificadores de 8 caracteres serán:
52 × VR(62, 7) = 52 × 627 = 183123959522816

Si todos el caracteres deben ser diferentes, entonces la solución será:

52 × V (61, 7) = 52 × 61 × 60 × 59 × 58 × 57 × 56 × 55 = 600956640.

(b) En este caso, los identificadores pueden tener longitud de 1 a 6. La solución será:

$52\ (1 + 52(1 + \sum_{y=1}^{5} \mathrm{V}\ (61, y)) =$
$52(1 + \mathrm{V}\ (61, 1) + \mathrm{V}\ (61, 2) +$
$\mathrm{V}\ (61, 3) + \mathrm{V}\ (61, 4) + \mathrm{V}\ (61, 5)) =$
37785374744

(c) Este caso es como el anterior pero ahora sólo hace falta considerar 26 letras y 10 dígitos:
$26(1 + \sum_{y=1}^{5} \mathrm{V}\ (35, y) =$
$26(1 + \mathrm{V}\ (35, 1) + \mathrm{V}\ (35, 2) + \mathrm{V}\ (35, 3) + \mathrm{V}\ (35, 4)$
$+\mathrm{V}\ (35, 5)) = 1046577376.$

(d) Calculamos, primero, cuantos identificadores no tienen ninguna vocal:
$21(1 + \sum_{y=1}^{5} \mathrm{V}\ (30, y)) =$
$21\big(1 + \mathrm{V}\ (30, 1) + \mathrm{V}\ (30, 2) + \mathrm{V}\ (30, 3) + \mathrm{V}\ (30, 4)$
$+ \mathrm{V}\ (30, 5)\big) =$
373457721

Sustrayendo de la cantidad del apartado anterior obtendremos el resultado deseado:
$1046577376 - 373457721 = 673119655$

8) ¿Cuántos números naturales existen menores que 10^6 *que no sean capicúas?*

Consideramos que un número es capicúa si al invertir el orden de sus cifras obtenemos el mismo número. Los números naturales de una cifra son todo capicúa. No consideramos al 0 como un elemento del conjunto de los números naturales.

Números capicúa de una cifra: $A_{1=}\{1,2,3, \dots \dots, 9\}; |A_1| = 9$ meros capicúa de dos cifras; $A_{2=}\{11,22,33, \dots \dots, 99\}; |A_2| = |A_1| = 9$

Números capicúa de tres unas cifras: $|A_3| = 9 \cdot 10 = 90$

Números capicúa de cuatro cifras: $|A_2| = |A_3| = 90$

Números capicúa de cinco cifras: $|A_2| = 9 \cdot VR_{10,2} = 9 \cdot 10 = 90$

Números capicúa de seis cifras:
$|A_6| = |A_5| = 900$

En total tenemos $\sum_{i=1}^{6} |A_i| = 2 \cdot (9 + 90 + 900) = 1998$ números capicúa menores 10^6 ,por lo que el número de números naturales que no son capicúa es de :999,999-1,998=998,001.

9) Determina el número de soluciones enteras de la ecuación:

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 32$
a) $x_i \geq 0 \quad 1 \leq i \leq 4$
b) $x_i > 0 \quad 1 \leq i \leq 4$
c) $x_1, x_1 \geq 5; \quad x_1, x_1 \geq 7$
d) $x_i \geq 8 \quad 1 \leq i \leq 4$
e) $x_i \geq -2 \quad 1 \leq i \leq 4$
f) $x_1, x_2, x_3 > 0; \quad 0 < x_4 \leq 25.$

a) $\binom{32+4-1}{32} = \frac{35!}{3! \cdot 32!}$
b) $\binom{28+4-1}{28} = \frac{31!}{3! \cdot 28!}$
c) $\binom{8+4-1}{8} = \frac{11!}{3! \cdot 8!}$
d) $\binom{0+4-1}{0} = \frac{3!}{3! \cdot 0!} = 1$
$\therefore z_i = x_i + 2 \forall i = 1,2,3,4;$

Se tiene el sistema:
$\begin{cases} z_1 + z_{2+} z_{3+} z_4 = 40, \\ 0 \leq z_i \forall i = 1 \dots, 4 \end{cases}$

Se tiene un total de $\binom{40+4-1}{40} = \frac{43!}{3! \cdot 40!}$;
$z_{1=} x_{1,} - 1, z_{2=} x_{2,} - 1, z_{3=} x_{3,} - 1, z_{4=} x_4 - 1$

Se tiene el sistema:
R=$\begin{cases} z_1 + z_{2+} z_{3+} z_4 = 28, \\ 0 \leq z_i \forall i = 1 \dots, 4 \ \wedge z_4 \leq 24 \end{cases}$
|X|=$\begin{cases} z_1 + z_{2+} z_{3+} z_4 = 28, \\ 0 \leq z_i \forall i = 1 \dots, 4 \end{cases}$; $\binom{31}{28}$
|A|=$\begin{cases} z_1 + z_{2+} z_{3+} z_4 = 28, \\ 0 \leq z_i \forall i = 1 \dots, 3 \ \wedge 25 \leq z_4 \end{cases} = \binom{6}{3}$
|R|=|X|-|A|=$\binom{31}{28} - \binom{6}{3}$=4475.

IX. Conclusiones

Los problemas didácticos propuestos en este trabajo, sobre cálculo combinatorio permiten realizar modelos matemáticos a través de axiomas, postulados y teoremas, para llegar a modelar situaciones reales, mediante conceptos preliminares como; variaciones, permutaciones y combinaciones.

El ABP permite fragmentar problemas en subsistemas para poder realizar conjeturas, algoritmos y finalmente proponer estrategias de solución. Sus elementos básicos son el análisis, la lógica, la construcción de patrones y la generalización. Los procesos de enseñanza-aprendizaje deben ser orientados bajo una perspectiva en la que los estudiantes tengan diferentes soluciones que posteriormente demuestren como lo plantea Polya.

Gracias a la teoría de conjuntos se inicia el estudio formal sobre distintas configuraciones de objetos discretos dentro de la combinatoria, así como principios fundamentales para el conteo y el análisis combinatorio, paralelamente la noción de función da sentido a conceptos algebraicos elementales como los de aplicación, relaciones binarias, isomorfismo, coeficientes binomiales, permutaciones y variaciones.

La indagación histórica permite vislumbrar del proceso de transformación que sufrieron los conjuntos discretos, donde a través de las relaciones entre los elementos y sus operaciones, surge el cambio de sus estructuras.

Referencias

[1] Riordan, J. *Introduction to combinatorial analysis*. Courier Corporation. (USA,2012)
[2] Bertalanffy, L. V., & Almela, J. *Teoría general de los sistemas: fundamentos, desarrollo, aplicaciones* (No. 001.5). Fondo de Cultura Económica (México, 1976).
[3]Johnsonbaugh, R. *Matemáticas discretas*. Pearson Educación. (México, 2005)
[4] Ralph P. Grimaldi. *Matemáticas discretas y combinatoria: una introducción con aplicaciones*. Pearson Educación. (México,1998).
[5] Wilhelm, Richard. *I Ching. El libro de las mutaciones*. Traducción de D. J. Vogelmann. Prólogo de Carl Gustav Jung. Barcelona: Edhasa. ISBN 978-84-350-1902-6. (España,1960)
[6] Nam, PB y Miller, D. *Fundamentos de Pa Kua Chang* . Publicaciones únicas. (España,1998)
OPCION 2 Too, L. y Hai, YC. *Aplicado Pa-Kua y Lo Shu Feng*

Shui . North American Ed., Publicaciones orientales. (USA, 1993)
[7] O'Connor, John J.; Robertson, Edmund F., «Zhu Shijie» (en inglés), *MacTutor History of Mathematics archive*, Universidad de Saint Andrews.
[8] [10] R. P. Grimaldi, Discrete and combinatorial mathematics, Addison-Wesley, (USA,1989).
[9] Bhaskara Acharya, II, y Bhaskara Acharya, II. Lilavati Álgebra, con aritmética y medición del sánscrito de Brahmegupta y Bhascara, traducido por HT Colebrooke (USA,1817).
OPCION 2 Sarma, K.V. Līlāvatī de Bhāskarācārya con Kriyākramakarī de Śaṅkara y Nārāyaṇa. *Hoshiarpur: Instituto de Investigación Védica Vishveshvaranand* . (USA, 1975)
[10] Simonson, S. The Mathematics of Levi ben Gershon, the Ralbag. *Dpt. of Math and Comp. Sc., Stonehill College, North Easton, MA*. (USA, 2000)
[11] Stifel, M.. *Arithmetica integra*. apud Iohan Petreium. (USA,1969)
[12] Tartaglia, N.. General trattato di numeri, et misure. Vinegia. (USA,1556)
[13] Cardano, G.. *El libro sobre juegos de azar: (Liber de ludo aleae)* . Holt, Rinehart y Winston. (USA, 1961)
[14 Vilenkin, N. I.. *De cuantas formas?: Combinatoria*. Mir. (USA,1972).
[15] Pascal, B.. *Traité du triangle arithmétique avec quelques autres petits traitez sur la mesme matière*. Chez Gvillavme Desprer. (USA,1978)
[16] Huygens, C.. *De ratiociniis in ludo aleae*. Ex officinia J. Elsevirii. (USA,1980)
[17]Leibniz, G.. *Dissertatio de Arte Combinatoria.* Berlin: Sämtliche Schriften und Briefe. (Alemania,1666)
[18] Bernoulli, J. *Ars conjectandi*. Impensis Thurnisiorum, fratrum. (USA,1713)
[19] De Moivre, A.. *La doctrina de las posibilidades: o, Un método para calcular las probabilidades de eventos en juego* (Vol. 1). Chelsea Publishing Company. (USA,1756)
[20] Laplace, P. S.. *Théorie analytique des probabilités*. Courcier. (Francia,1820)
[21] Stewart, I. N.. *Galois theory*. CRC Press. (USA,2015)
[22] EULER, L. (1736): “Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis.” Commentarii Academice Scientarum Imperialis Petropolitane 8, 128-140. (USA,2015)
[23] Ramsey, F. P.. On a problem of formal logic. In *Classic Papers in Combinatorics* (pp. 1-24). Birkhäuser Boston. (Alemania, 2009)
[24] Erdos, ˝ P., Szekeres, G.: “On a Combinatorial Problem in Geometry”, Compositio Math (USA,1954)
[25] Kolmogorov A.N.: Foundations o f the theory ofprobability, Chelsea, New York. (USA,1956)
[26] Pólya, G.. Kombinatorische anzahlbestimmungen für gruppen, graphen und chemische verbindungen. *Acta mathematica*, *68*, 145-254. (Alemania,1937)
[27] Flajolet, P., Lam, TY y Lutwak, E.. *Geometrías combinatorias* (Vol. 29). Prensa de la Universidad de Cambridge. (USA,1987)
[28] Oxley, JG. *Teoría matroide* (Vol. 3). Oxford University Press, Estados Unidos.(USA,2006)
[29] Fulton, M. W., & Fulton, W. *Young tableaux: with applications to representation theory and geometry* (Vol. 35). Cambridge University Press. (USA,1997).
[30] Berge, C. Principles of combinatorics. *New York*, 176. (USA,1971).
[31] Torretti, R.. El paraíso de Cantor. *La tradición conjuntista en filosofía de la matemática. Santiago de Chile: Universitaria*. (USA,1998).
[32] Amor-Montaño, J. A. *Teoría de conjuntos para estudiantes de ciencias*. Las Prensas de Ciencias. (USA, 2009)
[33] Rey Pastor, J., Calleja, P., Pedro, T., & César, A. Análisis matemático: análisis algebraico: teoría de ecuaciones: cálculo infinitesimal de una variable. (USA,1952).
[34] Laveaga, C. G. *Álgebra superior: curso completo*. Universidad Nacional Autónoma de México. (México, 2014)
[35] Ortega, J. M. *Introducción al análisis matemático* (Vol. 5). Servei de Publicacions de la Universitat Autònoma de Barcelona. (España, 1993)
[36] Berman G. & Fryer K. D. Introduction to combinatorics. Academic Press. N. Y. (USA, 1972)
[37] Brualdi, R. A. *Introductory combinatorics*. Pearson Education India. (USA, 1977)
[38] MacMahon, P. A. *Combinatory Analysis, Volumes I and II* (Vol. 137). American Mathematical Soc. (USA,2001).
[39] Lian, B. *Un primer curso de matemática discreta*. Springer Science & Business Media. (USA, 2000)
[40] Ribnikov, K. *Análisis combinatorio*. Moscú: Mir. (Moscú, 1988).
[41]Gómez, B. R. Aprendizaje basado en problemas (ABP): una innovación didáctica para la enseñanza universitaria. *Educación y educadores*. (España,2005)
[42] Sastre, G. *El aprendizaje basado en problemas* (Vol. 235004). Editorial Gedisa. (México, 2018)
[43]Pólya, G. *Como plantear y resolver problemas*. Editorial Trillas. (México,1982)
Gómez, B. R. Aprendizaje basado en problemas (ABP): una innovación didáctica para la enseñanza universitaria. *Educación y educadores*. (México,2005)
[44] Cavaleri S, Sterman J. Towards evaluation of systems thinking interventions: a case study. System Dynamics Review 13(2): pp. 171–186. (USA,1997).
[45] Checkland, P y Scholes J. Soft systems methodology: a 30-year retrospective. Systems Research and Behavioral Science Volume: 58, Publisher: Wiley, pp. 11-58. (USA,1999).